CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL — **TRAVAUX DIRIGES** — **SERIE N°1**

Exercice6:

Un point matériel de masse m a une trajectoire circulaire de rayon R. L'abscisse curviligne s(t) est donnée par $s(t) = R.\ln(1+\alpha t)$ α=constante > 0

1. Donner les expressions des composantes tangentielle et normale de l'accélération a

2. Calculer l'angle entre la vitesse v et l'accélération a

Exercice7:

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz .
Ses équations horaires sont : $x = R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$; $z = h\theta$. R est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection OM' de OM sur Oxy .

1. Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.

2. Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.

3. Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan Oxy . Calculer le rayon de courbure.

Exercice8:

Dans le plan xOy d'un repère (O , i , j , k), un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre I (R,0,0).
A l'instant t = 0 , P se trouve en A (2R,0,0) et possède la vitesse positive v_0 $(0,v_0,0)$. On désigne par r et θ les coordonnées polaires de P .

1. Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.

2. Représenter sur la figure la base polaire (u_r,u_θ) de P . Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse et accélération v et a de P dans le repère (O, u_r,u_θ,k).

3. Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A).

• Donner l'expression de s en fonction de θ .

• Représenter sur la figure la base intrinsèque (T , N) de P .

• Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de v et de a dans cette base.

• Calculer les composantes polaires de T et de N . Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de v et de a .

4. On désigne par ω la vitesse angulaire de P , dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante.

• Donner en fonction de t , les expressions de θ puis de r. En déduire les expressions en fonction de t de v et a dans les bases polaire et de Frenet.

Exercice9:

Démontrer que pour un mouvement circulaire et uniforme d'un point M, l'accélération peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\gamma} = \vec{\omega} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\omega})$$

$\vec{\omega}$: vitesse angulaire ; $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$: le vecteur position.
Calculer le module de $\vec{\gamma}$ dans le cas où : $\vec{r} = 3\vec{k}$ et $\vec{\omega} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

Exercice10:

Une particule de masse m décrit la trajectoire d'équations paramétriques où R, b et ω sont des constantes positives.

$$\begin{cases} x(t) = R\sin\omega t \\ y(t) = R(1-\cos\omega t) \\ z(t) = bt \end{cases}$$

Déterminer

1. La vitesse de la particule et L'accélération ;

2. Déterminer la trajectoire de la particule puis la représenter.

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL — **TRAVAUX DIRIGES** — **SERIE N°1**

Exercice 11

Dans le plan xOy, un point A se déplace sur l'axe Oy avec l'équation horaire y = a sin(ωt) (a et ω sont des constantes positives), et un point B se déplace sur l'axe Ox avec l'équation horaire x = a cos(ωt).

1- Calculer les composantes et le module du vecteur AB.

2- Vérifier que le point M de coordonnées ½ a cos(ωt), ½ a sin(ωt)) est le milieu de AB.

3- Quelle est la trajectoire décrite par le point M.

4- Déterminer la vitesse (en vecteur et en module) et l'accélération (en vecteur et en module) du point M.

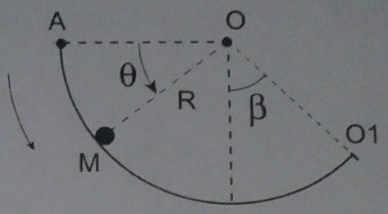
5- Rappeler l'expression du vecteur vitesse v et du vecteur accélération a dans le repère de Frenet (e_T, e_N). En déduire l'expression du vecteur unitaire tangent e_T à cette courbe.

6- Calculer, en fonction du temps, l'abscisse curviligne du point M.

Exercice 12

Un objet est en contact avec une piste en arc de cercle de rayon R et de centre O. On repère la position M de l'objet par l'angle θ défini par rapport à l'horizontale OA. La piste en arc de cercle se termine au point O1 tel que l'angle fait avec la verticale soit β.

L'objet est lâché de A (haut de la piste) sans vitesse initiale.



1. Représenter la base polaire (e_r, e_θ) associée au point M sur un schéma.

2. Exprimer dans la base polaire (e_r, e_θ) les vecteurs position OM(t),vitesse v(t) et accélération a(t).

3. Déduire de la question précédente le module *v* du vecteur vitesse et le module *a* du vecteur accélération. Les résultats seront exprimés en fonction de R et θ.

Exercice 13

Un point M se déplace dans le plan xOy avec un mouvement, en fonction du temps t, décrit par :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha t\ \vec{i} + \sqrt{4 - t^2}\ \vec{j}$$

, o`u α est une constante positive.

1- Quel est l'intervalle de temps pendant lequel ce mouvement est défini?

2- Trouver la valeur de la constante α pour que le vecteur OM soit toujours perpendiculaire à sa dérivée.

3- Donner alors l'équation de la trajectoire du point M. Faire un dessin de cette trajectoire.

4- Donner, en fonction du temps, l'expression du vecteur unitaire tangent `a la trajectoire.

Exercice 14

Soit un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) avec r fonction de θ tel que r(θ) = sinθ/cos2θ.

1. Exprimer le vecteur position OM dans la base (e_r, e_θ). Calculer dOM/dθ.

2. Donner les coordonnées cartésiennes du point M en fonction de θ et montrer que sa trajectoire est parabolique.

Exercice 15

Un point M se déplace dans un plan muni d'un repère (O, e_x, e_y) où e_y est dirigé suivant la verticale ascendante. Sa position en coordonnées polaires est donnée par $r(t) = be^{t/\tau}$ et $\theta(t) = c\ t$ avec r(t) exprimé en mètres, θ en radians et t en secondes.

1. Donner les unités de b, c et τ dans le système international. Dans la suite du problème, on prendra τ = 1 et c = 1 en unités du système international.

2. Exprimer les vecteurs position OM(t), vitesse v(t) et accélération a(t) sur la base (e_r, e_θ) en fonction de b et t.

3. Calculer les modules v(t) du vecteur vitesse et a(t) du vecteur accélération.
Vérifier que $v(t) = \sqrt{2}\ be^t$.

4. Rappeler l'expression du vecteur vitesse v(t) dans la base de Frênet (e_T, e_N). En déduire l'expression du vecteur e_T sur la base (e_r, e_θ).

5. Calculer le chemin parcouru s(t) le long de la trajectoire entre les instants t = 0 et t. On prendra s(t = 0)= 0.

6. Rappeler l'expression de l'accélération dans la base de Frênet. Déterminer la composante tangentielle a_T de l'accélération en fonction de b et t.

7. En utilisant l'expression du module de a(t) calculée précédemment, en déduire la composante normale a_N de l'accélération puis déterminer le rayon de courbure ρ(t) de la trajectoire.

8. Exprimer en fonction de θ les vecteurs de base e_r et e_θ sur la base (e_x, e_y). En déduire l'expression en coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse v du point M.

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL — **TRAVAUX DIRIGES** — **SERIE N°1**

Exercice 1

On considère un cercle d'équation $x^2+z^2-2\alpha x=0$ et un point mobile sur le cercle. Soit l'angle du vecteur OM avec Ox. (O : origine des axes). Cet angle est fonction du temps selon la loi : $\tan(\theta) = \beta/t$; $\beta = 1s$.

1. Trouver les équations paramétriques de M : x(t) et z(t)

2. calculer la vitesse du point M

3. calculer l'accélération du point M

Exercice2 :

une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations de la trajectoire sont, en coordonnées polaires :

- $r = r_0 \cdot e^{-\frac{t}{a}}$
- $\theta = \frac{t}{a}$

avec r_0 et a constantes positives.

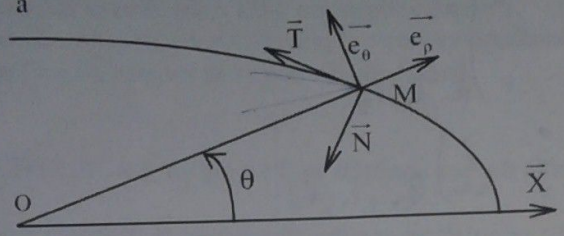


Figure 1

1) Calculer le vecteur vitesse de la particule.
2) Montrer que l'angle $(\vec{V}, \vec{e_\theta})$ est constant. Que vaut cet angle ?
3) Calculer le vecteur accélération de la particule
4) Montre que l'angle $(\vec{\gamma}, \vec{N})$ est constant. Que vaut cet angle ? (on se servira de la question 2)
5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 3

Soit un point M mobile dans un référentiel galiléen. Ses coordonnées rapportés à un système d'axe (O, x, y, z) sont, en fonction du temps :

$x(t) = 2\cos(\omega t)$; $y(t) = 2\sin(\omega t)$ et $z = 0$

1. montrer que le mouvement de M est circulaire et uniforme. Simplifier le problème en travaillant dans le plan du mouvement.

2. Déterminer le vecteur accélération. Préciser son sens.

3. Etablir la loi horaire s(t) du mouvement (s(t) est l'abscisse curviligne du point M). L'origine du mouvement est fixée au point A(2,0,0)

4. Soit m la projection orthogonale de M sur l'axe O x, . Etudier le mouvement du point m : équation horaire, vitesse, accélération. Quelle est la nature de ce mouvement.

Exercice4 :

Un point M se déplace dans le plan (O, x, y). La distance OM est définie par OM= R = a t l'angle (x,OM) par $\theta = \Omega t$

1. Calculer, en coordonnées polaires, la vitesse et l'accélération du point M (vecteur unitaire : e_u porté par OM, e_v perpendiculaire à OM).

2. Exprimer les vecteurs unitaires T et N des coordonnées intrinsèques en fonction de a,Ω t, e_u et e_v.

3. Déterminer le rayon de courbure ρ de la trajectoire.

Exercice5:

Les coordonnées d'un mobile dans un système d'axe (O, x, y, z) sont données en fonction du temps par :

$x = \alpha t^3 - 3\gamma t$; $y = -3\beta t^2$ et $z = \alpha t^3 + 3\gamma t$ avec $\alpha = 1ms^{-3}$ $\beta = 1ms^{-2}$ $\gamma = 1ms^{-1}$

Etablir la loi du mouvement. Montrer que la vitesse v fait un angle constant avec z